

Uma Extensão do Teorema de Perron-Frobenius

An extension of the Perron-Frobenius theorem

ROBERT NICOL*

RESUMO: Partindo de um teorema bastante simples de Scheffold, um conjunto de condições suficientes é encontrado para que o sistema $pAp = Bp$ tenha uma solução com $p > 1$ e $p > 0$, onde A e B são $n \times n$ matrizes positivas. É mostrado que tal sistema seria uma extensão do sistema $pAp = Ip$ para o qual o teorema de Perron-Frobenius é válido.

PALAVRAS-CHAVE: Análise sraffiana; sistema de produção.

ABSTRACT: Starting from a rather simple theorem by Scheffold a set of sufficient conditions is found for the system $pAp = Bp$ to have a solution with $p > 1$ and $p > 0$, where A and B are $n \times n$ positive matrices. It is shown that such a system would be an extension of the system $pAp = Ip$ for which the Perron-Frobenius theorem holds.

KEYWORDS: Sraffian analysis; production system.

JEL Classification: B51.

É bem sabido que para um sistema de produção simples, uma série de resultados interessantes pode ser obtida para o esquema de Sraffa, tais como: uma taxa de retomo positiva, preços positivos e uma relação inversa entre taxa de retomo e taxa salarial (vide Scheffold pp. 141-2). No entanto, ao tentarmos aplicar o esquema para produção conjunta, tais resultados nem sempre podem ser observados.

O presente trabalho tem por objetivo estender os resultados de produção simples para o caso de produção conjunta, através de uma extensão do conhecido teorema de Perron-Frobenius para matrizes positivas (semi-positivas).

A estrutura do trabalho é bastante simples: partindo de um resultado de Scheffold para produção conjunta, tenta-se ampliar o resultado original para aumentar sua abrangência. Scheffold em um de seus trabalhos (Scheffold pp. 144-5), ao analisar o problema da produção conjunta observou que se tivéssemos uma matriz A de insumos e uma matriz B de produtos, correspondente a n setores “produtivos”, “essenciais” e “separadamente produzíveis” (os conceitos de “essencialidade” e de “possibilidade de produção isolada” são de autoria de Scheffold), então para esse esquema os resultados mais importantes de Sraffa seriam válidos. Em termos mais

* Escola de Administração de Empresas de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas. São Paulo/SP, Brasil.

concretos, valendo-se dos conceitos de “essencialidade” e de “possibilidade de produção isolada”, Schefold demonstra que a matriz $(B - A)^{-1}$ de um tal sistema seria positiva. Sendo positiva, os resultados desejados seguiriam facilmente, como podemos ver a seguir.

Teorema (de Schefold):

Para um sistema produtivo tal que $(B - A)^{-1} > 0$ existe uma taxa retorno positiva e para tal taxa existe um sistema de preços positivo. Além do mais, existe o sistema básico e, conseqüentemente, uma relação inversa entre a taxa de retorno e a taxa salarial.

Demonstração:

Seja $(B - A)^{-1} > 0$, então, forçosamente $(B - A)^{-1}A > 0$ portanto, consideremos $M = (B - A)^{-1}A$ onde $M > 0$ e a solução do sistema $pIp = Mp$.

Sabemos pelo Teorema de Perron-Frobenius que para $M > 0$ temos uma solução tal que:

$$\rho > 0$$

e

$$p > 0.$$

Portanto $\rho Ip = (B - A)^{-1}Ap$ tem solução com

$$\rho > 0$$

e

$$p > 0$$

ou seja $\rho(B - A)p = Ap$ ou

$$Bp = \left(\frac{1 + \rho}{\rho} \right) Ap$$

tem solução do tipo desejado. Façamos $R = (1 + \rho)/\rho$. É claro que se $\rho > 0$, R será maior que 1 e, conseqüentemente, existirá uma solução para o sistema tal que:

$$p > 0$$

e

$$R > 1.$$

É também fácil ver que para o mesmo $\rho > 0$, existe um vetor $q > 0$ tal que $qB = RqA$ o que quer dizer que existe o sistema básico e, conseqüentemente, uma relação (linear) inversa entre a taxa salarial e a taxa de lucro.

Extensão do Resultado

Chamemos $D = (B - A)$ tal que $D^{-1} > 0$ e de $D > 0$ de uma matriz de Schefold, então:

Teorema:

Seja uma matriz produtiva tal que

$$D = \begin{bmatrix} + & - & \dots & - \\ - & + & \dots & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ - & - & \dots & + \end{bmatrix}$$

isto é, uma matriz para a qual todos os elementos da diagonal principal são positivos, enquanto os elementos restantes são negativos. D é uma matriz de Schefold, isto é, $D^{-1} > 0$ e $\det D > 0$.

Demonstração:

Demonstraremos o resultado por indução para uma matriz D_4 (4x4). A generalização para o caso $n \times n$ é imediata.

O caso de uma matriz 1x1 é óbvio.

Efetivamente seja $D_1 = [(b_{11} - a_{11})]$ tal que o sistema seja produtivo. É óbvio que $\det D_1 > 0$ e que $D_1^{-1} > 0$.

Para o caso de uma matriz 2x2 teríamos:

$$D_2 = \begin{bmatrix} (b_{11} - a_{11}) & (b_{12} - a_{12}) \\ (b_{21} - a_{21}) & (b_{22} - a_{22}) \end{bmatrix}$$

tal que $(b_{11} - a_{11})$ e $(b_{22} - a_{22})$ são positivos e, $(b_{12} - a_{12})$ e $(b_{21} - a_{21})$ são negativos, e

$$\begin{aligned} (b_{11} - a_{11}) + (b_{21} - a_{21}) \\ (b_{22} - a_{22}) + (b_{12} - a_{12}) \end{aligned}$$

são positivos, já que o sistema é produtivo. A partir dessas condições, é fácil verificar que $|D_2| = (b_{11} - a_{11})(b_{22} - a_{22}) - (b_{21} - a_{21})(b_{12} - a_{12})$ é maior que zero, e que

$$D_2^{-1} = \frac{1}{|D_2|} \begin{bmatrix} (b_{22} - a_{22}) & -(b_{22} - a_{12}) \\ -(b_{21} - a_{21}) & (b_{11} - a_{11}) \end{bmatrix} > 0$$

Para demonstrar a validade da proposição para o caso de uma matriz 4x4, admitamos que o teorema seja válido para o caso de uma matriz 3x3, e tentemos inicialmente mostrar que $|D_4| > 0$.

Como

$$D_4 = \begin{bmatrix} (b_{11} - a_{11}) & (b_{12} - a_{12}) & \dots & (b_{14} - a_{14}) \\ (b_{21} - a_{21}) & & & \\ (b_{31} - a_{31}) & & \text{etc.} & \\ (b_{41} - a_{41}) & & & \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} (b_{11} - a_{11}) &> 0 \\ (b_{21} - a_{21}) &< 0 \\ (b_{31} - a_{31}) &< 0 \\ (b_{41} - a_{41}) &< 0 \end{aligned}$$

e $(b_{11} - a_{11}) + (b_{21} - a_{21}) + (b_{31} - a_{31}) + (b_{41} - a_{41}) > 0$ já que o sistema é produtivo, é claro que

$$(b_{11} - a_{11}) > \begin{aligned} &-(b_{21} - a_{21}) \\ &-(b_{31} - a_{31}) \\ &-(b_{41} - a_{41}) \end{aligned}$$

isto é, o termo da diagonal principal é maior, em termos absolutos, que os outros termos da mesma coluna. Consequentemente vamos adicionar uma parcela da primeira linha à segunda linha, uma parcela da primeira linha à terceira linha e, finalmente, uma parcela da primeira linha à quarta linha, tal que

$$\begin{aligned} 1 > \theta, \epsilon, \sigma > 0 \\ \theta + \epsilon + \sigma < 1 \end{aligned}$$

de forma a obtermos uma matriz do tipo

$$\begin{bmatrix} (b_{11} - a_{11}) & (b_{12} - a_{12}) & (b_{13} - a_{13}) & (b_{14} - a_{14}) \\ 0 & (b_{22} - a_{22}) + \theta(b_{12} - a_{12}) & \dots & \\ 0 & (b_{22} - a_{22}) + \epsilon(b_{12} - a_{12}) & & \\ 0 & (b_{22} - a_{22}) + \sigma(b_{12} - a_{12}) & & \text{etc.} \end{bmatrix}$$

cujo determinante terá forçosamente o mesmo valor (e sinal) que $|D_4|$.

Pode-se verificar que a submatriz 3x3, contida no canto de baixo (lado direito), da matriz transformada, isto é

$$F = \begin{bmatrix} (b_{22} - a_{22}) + \theta(b_{12} - a_{12}) & (b_{23} - a_{23}) + \theta(b_{13} - a_{13}) & (b_{24} - a_{24}) + \theta(b_{14} - a_{14}) \\ (b_{32} - a_{32}) + \epsilon(b_{12} - a_{12}) & (b_{33} - a_{33}) + \epsilon(b_{13} - a_{13}) & (b_{34} - a_{34}) + \epsilon(b_{14} - a_{14}) \\ (b_{42} - a_{42}) + \sigma(b_{12} - a_{12}) & (b_{43} - a_{43}) + \sigma(b_{13} - a_{13}) & (b_{44} - a_{44}) + \sigma(b_{14} - a_{14}) \end{bmatrix}$$

é uma matriz produtiva visto que as colunas têm soma positiva, ex.:

$$(b_{22} - a_{22}) + \theta(b_{12} - a_{12}) + (b_{32} - a_{32}) + \epsilon(b_{12} - a_{12}) + (b_{42} - a_{42}) + \sigma(b_{12} - a_{12}) > 0$$

com resultados semelhantes para as outras colunas, com a característica adicional de F ser do tipo

$$F = \begin{bmatrix} + & - & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{bmatrix}$$

o que quer dizer que F^{-1} tem todos seus elementos > 0 , e que $|F| > 0$ mas como $|D_4| = (b_{11} - a_{11}) |F|$ então $|D_4| > 0$. Para demonstrar o valor positivo dos termos de D_4^{-1} , só temos que observar o sinal dos termos da matriz das menores de D_4 , isto é, o sinal dos termos de

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{bmatrix}$$

onde

$$\beta_{11} = \det \begin{bmatrix} (b_{22} - a_{22}) & (b_{23} - a_{23}) & (b_{24} - a_{24}) \\ (b_{32} - a_{32}) & (b_{33} - a_{33}) & (b_{34} - a_{34}) \\ (b_{42} - a_{42}) & (b_{43} - a_{43}) & (b_{44} - a_{44}) \end{bmatrix}$$

com definições semelhantes para os outros β

E evidente que $\beta_{11} > 0$, já que os termos da matriz que lhe dá origem são os termos de uma matriz 3x3 produtiva do tipo

$$\begin{bmatrix} + & - & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{bmatrix}$$

e, conseqüentemente, seu determinante é positivo.

Com relação a

$$\beta_{12} = \det \begin{bmatrix} (b_{21} - a_{21}) & (b_{23} - a_{23}) & (b_{24} - a_{24}) \\ (b_{31} - a_{31}) & (b_{33} - a_{33}) & (b_{34} - a_{34}) \\ (b_{41} - a_{41}) & (b_{43} - a_{43}) & (b_{44} - a_{44}) \end{bmatrix}$$

pode-se verificar que pela adição de parcelas positivas da última linha às outras duas linhas vamos obter um determinante de igual valor com a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} (b_{21} - a_{21}) + \theta(b_{41} - a_{41}) & (b_{23} - a_{23}) + \theta(b_{43} - a_{43}) & 0 \\ (b_{31} - a_{31}) + \epsilon(b_{41} - a_{41}) & (b_{33} - a_{33}) + \epsilon(b_{43} - a_{43}) & 0 \\ (b_{41} - a_{41}) & (b_{43} - a_{43}) & (b_{44} - a_{44}) \end{bmatrix}$$

onde $0 < \theta$, $\varepsilon < 1$ e $0 < \theta + \varepsilon < 1$ e que é o determinante de uma matriz de termos com sinais

$$\begin{bmatrix} - & - & 0 \\ - & + & 0 \\ - & - & + \end{bmatrix}$$

que, claramente, tem determinante com sinal negativo, isto é, $\beta_{12} < 0$. De forma semelhante, pode-se mostrar que

$$\beta_{13} > 0 \quad \beta_{14} < 0 \quad \beta_{21} < 0 \quad \beta_{22} > 0 \quad \text{etc.}$$

Teorema:

Para as matrizes de Schefold, aplica-se o teorema de Schefold.

Demonstração: é óbvia.

Consideremos, agora, um sistema produtivo de 4 setores, para o qual a matriz $(B - A)$ tem seus elementos da diagonal principal tal que

$$\frac{b_{ii}}{a_{ii}} > 1 \text{ e onde } T = \min \left\{ \frac{b_{ii}}{a_{ii}} \right\}$$

e os outros elementos $0 \leq \frac{b_{ij}}{a_{ij}} < T$ para $i \neq j$ com pelo menos um elemento > 1 .

Observação:

Se todos os elementos $0 \leq \frac{b_{ij}}{a_{ij}} < T$ para $i \neq j$ fossem menores do que 1, estaríamos considerando uma matriz de Schefold, para a qual já vimos que existe uma solução.

Admitamos que $\max \left\{ \frac{b_{ij}}{a_{ij}} \right\} = V$ para $i \neq j$. Consequentemente $1 < V < T$.

Pegemos um valor $(1 + s)$ um “pouco” superior a V mas tal que

$V < (1 + s) < T$ e $(1 + s) = V + \mu$, onde $\mu > 0$ mas μ tendendo a zero. Consideremos a matriz $[B - (1 + s)A]$. Claramente

$$[B - (1 + s)A] = \begin{bmatrix} \left(\frac{b_{11}}{a_{11}} - (1 + s) \right) a_{11} & \left(\frac{b_{12}}{a_{12}} - (1 + s) \right) a_{12} & \left(\frac{b_{13}}{a_{13}} - (1 + s) \right) a_{13} & \left(\frac{b_{14}}{a_{14}} - (1 + s) \right) a_{14} \\ \left(\frac{b_{21}}{a_{21}} - (1 + s) \right) a_{21} & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \text{ etc.}$$

nesta matriz, por construção, todos os elementos da diagonal principal são positivos, enquanto todos os outros elementos são negativos. Admitamos que esta matriz

seja produtiva. Então $[B - (1 + s) A]$ é uma matriz de Schefold, conseqüentemente aplica-se o teorema de Schefold. Portanto existe uma solução para o sistema

$$Bp = \rho (1 + s) Ap$$

tal que $\rho > 1$ e $p > 0$, existindo também a mercadoria-padrão para tal sistema. É fácil perceber que a solução do sistema anterior, corresponde a encontrar um sistema de preços positivos, tal que as taxas de retorno dos 4 setores sejam positivas e iguais, isto é, corresponde a encontrar $p > 0$ tal que:

$$\frac{\sum_1^4 [b_{1i} - (1 + s) a_{1i}] p_i}{\sum_1^4 (1 + s) a_{1i} p_i} = \rho_1$$

$$\frac{\sum_1^4 [b_{2i} - (1 + s) a_{2i}] p_i}{\sum_1^4 (1 + s) a_{2i} p_i} = \rho_2$$

$$\frac{\sum_1^4 [b_{3i} - (1 + s) a_{3i}] p_i}{\sum_1^4 (1 + s) a_{3i} p_i} = \rho_3$$

$$\frac{\sum_1^4 [b_{4i} - (1 + s) a_{4i}] p_i}{\sum_1^4 (1 + s) a_{4i} p_i} = \rho_4$$

$$\text{e } \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho > 0$$

Claramente, de qualquer um dos setores pode-se obter

$$\frac{\sum_1^4 [b_{1i} - (1 + s) a_{1i}] p_i}{\sum_1^4 a_{1i} p_i (1 + s)} = \rho \Rightarrow \frac{\sum_1^4 (b_{1i} - a_{1i}) p_i}{\sum_1^4 a_{1i} p_i} = \rho + s + \rho s$$

o que demonstra que para o problema $Bp = \lambda Ap$ existe uma solução tal que $p > 0$ e $\lambda = 1 + \rho + s + \rho s > 0$. *Observação:* já que os preços são determinados de forma relativa, podemos fazer com que sua soma totalize 1, isto é, $\sum P_i = 1$. Também podemos ver que

$$\rho = \frac{(b_{11} - a_{11}) p_1 + (b_{12} - a_{12}) p_2 + (b_{13} - a_{13}) p_3 + (b_{14} - a_{14}) p_4}{a_{11} p_1 + a_{12} p_2 + a_{13} p_3 + a_{14} p_4} =$$

$$\frac{\left(\frac{b_{11}}{a_{11}} - 1\right) a_{11} p_1 + \left(\frac{b_{12}}{a_{12}} - 1\right) a_{12} p_2 + \dots}{a_{11} p_1 + a_{12} p_2 + \dots} =$$

$$\left(\frac{b_{11}}{a_{11}} - 1\right) \theta_1 + \left(\frac{b_{12}}{a_{12}} - 1\right) \theta_2 + \dots$$

com $\theta_j = \frac{a_{1j} p_j}{\sum_j a_{1j} p_j}$

onde: $1 > \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, > 0$ e $\sum \theta_i = 1$, isto é, a taxa de retomo é uma média ponderada das taxas (físicas) de retomo dos diversos produtos produzidos por cada um dos setores. Consequentemente, podemos afirmar que:

$$\min \left\{ \frac{b_{ii}}{a_{ii}} - 1 \right\} \geq \rho + s + \rho s \geq \max \left\{ \frac{b_{ij}}{a_{ij}} - 1 \right\}$$

$i \neq j$

É fácil ver, também, que o $p > 0$ encontrado para o sistema

$$Bp = (1 + \rho + s + \rho s) Ap$$

é o mesmo $p > 0$ que satisfaz o problema original

$$Bp = (1 + \rho)Ap.$$

Igualmente, pode-se ver que para $[B - (1 + s) A]$ ser produtivo, a soma de qualquer uma das colunas deve ser maior que zero, isto é,

$$(b_{1i} - (1 + s) a_{1i}) + (b_{2i} - (1 + s) a_{2i}) + (b_{3i} - (1 + s) a_{3i}) + (b_{4i} - (1 + s) a_{4i}) > 0$$

ou seja,

$$\sum_j (b_{ji} - (1 + s) a_{ji}) > 0 \Rightarrow \frac{\sum_j b_{ji}}{\sum_j a_{ji}} > (1 + s) \text{ para todos } i = 1 \dots 4$$

Portanto, condições suficientes para a existência da solução procurada são que:

$$A) \frac{b_{ii}}{a_{ii}} > 1 \text{ sendo } \min \left\{ \frac{b_{ii}}{a_{ii}} \right\} = T$$

$$B) \quad 0 < \frac{b_{ij}}{a_{ji}} < T \text{ para } i \neq j \text{ com, pelo menos, um desses elementos}$$

$$> 1, \text{ e com } \max \left\{ \frac{b_i \neq j}{a_i \neq j} \right\} = V$$

$$C) \quad \frac{\sum_i b_{ij}}{\sum_i a_{ij}} > V \text{ para todos } j = 1 \dots 4 \text{ (já que podemos selecionar}$$

(1 + s) tão “próximo” de V quanto quisermos). Observação: esta condição corresponde à condição de produtividade do sistema.

E, se lembrarmos que o teorema de Schefold diz existir uma solução para qualquer sistema (A, B) positivo, produtivo, tal que:

$$A) \quad \frac{b_{ii}}{a_{ii}} > 1$$

$$B) \quad 0 < \frac{b_i \neq j}{a_i \neq j} < 1 \text{ e,}$$

$$C) \quad \frac{\sum_i a_{ij}}{\sum_i a_{ij}} > 1 \text{ para } j = 1 \dots 4 \text{ (condição de produtividade do sistema)}$$

podemos sintetizar os resultados em um só teorema.

Teorema:

Para o sistema $Bp = \lambda Ap$ onde $A, B > 0$ e

$$A) \quad \frac{b_{ii}}{a_{ii}} > 1 \text{ sendo que } \min \left\{ \frac{b_{ii}}{a_{ii}} \right\} = T$$

$$B) \quad 0 < \frac{b_i \neq j}{a_i \neq j} < T \text{ sendo } \max \left\{ \frac{b_i \neq j}{a_i \neq j} \right\} = V \text{ e}$$

$$C) \quad \frac{\sum_i b_{ij}}{\sum_i a_{ij}} > V \text{ isto corresponde à condição de produtividade (alterada) do sistema;}$$

existe uma solução para a qual $p > 0$ $\sum p_i = 1$ e $\lambda > 1$, sendo que existe a mercado-ria-padrão, e, ainda, $V \leq \lambda \leq T$.

O Teorema anterior pode ser “estendido” um pouco mais, se observarmos que para que exista uma solução como a desejada, não é necessário que a matriz trans-

formada $[B - (1 + s) A]$ seja produtiva. Basta que exista uma matriz diagonal Λ , com elementos positivos na diagonal principal tal que

$A(B - (1 + s) A)$ seja produtiva para que a solução desejada exista. Por quê? É imediato:

$$\text{se } \frac{\sum_i \lambda_i b_{ij}}{\sum_i \lambda_i a_{ij}} > V \text{ onde } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ & \dots \end{bmatrix}$$

então existe a solução desejada para o sistema $A(B - (1 + s) A)$. Mas a solução desse sistema é a mesma, em termos de preços e de taxa de retorno que a do sistema $[B - (1 + s) A]$, visto que a única alteração produzida por Λ será nos valores do autovetor esquerdo, que nos dá a mercadoria-padrão.

Exemplos:

Primeiramente consideremos o sistema $Bp = \lambda Ap$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 21 & 4 & 0.5 \\ 2 & 32 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Este sistema deve ter $A > 1$ e $p > 0$, além de gerar um sistema-padrão, visto que:

$$C = \begin{bmatrix} b_{ij} \\ a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0.5 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ com } \begin{aligned} T &= \min \left\{ \frac{b_{ii}}{a_{ii}} \right\} = 4 \\ V &= \max \left\{ \frac{b_i}{a_i} \right\} = 2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\sum b_{i1}}{\sum a_{i1}} &= \frac{24}{6} = 4 > 2 \\ \frac{\sum b_{i2}}{\sum a_{i2}} &= \frac{37}{7} = 5.29 > 2 \\ \frac{\sum b_{i3}}{\sum a_{i3}} &= \frac{9.5}{4} = 2.38 > 2 \end{aligned}$$

Portanto, as condições A, B e C são satisfeitas e, conseqüentemente, deve existir uma solução. De fato

$$\lambda = 3.37434268 \text{ e } 2 \leq \lambda \leq 4 \text{ e } \begin{aligned} p_1 &= 0.20776795 \\ p_2 &= 0.13735972 \\ p_3 &= 0.65487234 \end{aligned}$$

Consideremos, agora, o sistema composto por:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 10 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$$

$$22 \quad 10 \quad 6$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 2.1 \\ 9 & 0.75 & 300 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$$

$$20 \quad 11.7 \quad 303.1$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.125 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1.25 & 1.05 \\ 0.9 & 0.75 & 100 \end{bmatrix}$$

$$T = \max \left\{ \frac{b_{ii}}{a_{ii}} \right\} = 1.125$$

$$V = \min \left\{ \frac{b_i \neq j}{a_i \neq j} \right\} = 1.05$$

Na forma em que se encontra, tal sistema não é produtivo (para a produção de 20 unidades do produto 1, são consumidas 22 unidades do mesmo produto). Mas, existe um A que pode transformá-lo em produtivo.

De fato

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda B = \begin{bmatrix} 90 & 10 & 10 \\ 2 & 10 & 2.1 \\ 9 & 0.75 & 300 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$$

$$101 \quad 20.7 \quad 312.1$$

$$\Lambda A = \begin{bmatrix} 80 & 10 & 10 \\ 8 & 8 & 2 \\ 10 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$$

$$98 \quad 19 \quad 15$$

nesse sistema alterado

$$\frac{101}{94} = 1.0745 > 1.05$$

$$\frac{20.75}{19} = 1.0921 > 1.05$$

$$\frac{312.1}{15} = 20.8067 > 1.05$$

consequentemente as condições A, B e C são satisfeitas. Conclusão: deve existir um $\lambda > 1$ e $p > 0$ bem como um sistema-padrão para o *sistema original*:

$$\lambda = 1.09991561$$

$$p_1 = 0.003023$$

$$p_2 = 0.664579$$

$$1.05 \leq \lambda \leq 1.125$$

$$p_3 = 0.332397$$

Seria possível “melhorar” o Teorema, no sentido de diminuir as restrições impostas (A, B e C), e mesmo assim obter uma taxa de retorno positiva, um sistema de preços positivos e uma relação inversa entre a taxa de retorno e a taxa salarial?

Resposta: é possível, mas a um preço – o de não se obter todos esses resultados desejados ao mesmo tempo. Exemplo: podemos quebrar a condição B, e ainda encontrar alguns dos resultados desejados, como uma taxa de retorno positiva e preços positivos, mas não a relação inversa entre lucro e salários. Tomemos, por exemplo, o sistema:

$$A = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right] & B = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{array} \right] & C = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{array} \right] \\ \hline 2 & 2 & \hline 5 & 14 \end{array}$$

para este sistema podemos ver que as condições A e C são satisfeitas, mas não a condição B, visto que

$$T = \min \left\{ \frac{b_{ii}}{a_{ii}} \right\} < V = \max \left\{ \frac{b_{i \neq j}}{a_{i \neq j}} \right\}$$

o que não impede de se ter $\lambda > 1$ e $p > 0$. De fato $\lambda = 4$ e $p_1 = 2/3$
 $p_2 = 1/3$

mas λ já não fica entre os limites estabelecidos e tampouco existe a mercadoria-padrão, bem como a relação inversa entre a taxa de retorno e a taxa salarial.. Para se ver isto, basta completar o sistema da seguinte forma:

$$\lambda Ap + wI = Bp$$

onde

$$I = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.99 \end{pmatrix} \quad \text{excedente} = (3, 12) \quad w = \sigma (\text{excedente})$$

seja $\sigma = 0.1$ (excedente) então $w = 0.3 p_1 + 1.2 p_2$ o que nos dá o seguinte sistema:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + (0.3 p_1 + 1.2 p_2) \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.99 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

cuja solução é

$$\lambda = 4.8244 \quad e \quad \begin{array}{l} p_1 = 0.3890 \\ p_2 = 0.6110 \end{array}$$

Se compararmos este resultado com o primeiro obtido, veremos que:

$$\begin{aligned} & \text{1.º resultado} \\ w &= 0\% \text{ do excedente} \\ \lambda &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{2.º resultado} \\ w &= 10\% \text{ do exced} \\ \lambda &= 4.8244 \end{aligned}$$

isto é, o *salário subiu*, e a taxa de lucro aumentou!

Na realidade, pode-se demonstrar que para qualquer sistema produtivo 2x2 com $(A, B) > 0$, e para o qual

$$C = \begin{bmatrix} \frac{b_{11}}{a_{11}} & \frac{b_{12}}{a_{12}} \\ \frac{b_{21}}{a_{21}} & \frac{b_{22}}{a_{22}} \end{bmatrix} \quad \text{para o qual se observe} \quad \begin{aligned} \frac{b_{11}}{a_{11}} &> \frac{b_{21}}{a_{21}} \\ \frac{b_{22}}{a_{22}} &> \frac{b_{12}}{a_{12}} \end{aligned}$$

existe uma transformação T, tal que

$$T = \begin{bmatrix} 1 - \theta & \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{onde } 0 < \theta < \min \left\{ \frac{a_{11}}{a_{21}}, \frac{b_{12}}{b_{22}} \right\}$$

$$\text{e um } \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{onde } \Lambda_1 > 0 \text{ e } \Lambda_2 > 0$$

tal que $\Lambda T (B - (1 + s) A)$ é uma matriz de Schefold. Consequentemente para um tal sistema existe $\lambda > 1$ e $p > 0$, mas não necessariamente um sistema padrão, como acabamos de verificar.

Observação final:

Chamamos o presente trabalho de uma extensão do Teorema de Perron-Frobenius, o que vale uma justificativa. A razão é bastante simples: para o Teorema Perron-Frobenius $(I - A)$ é uma matriz de Schefold, só que todos os elementos fora da diagonal são menores do que zero. No presente caso, $(B - A)$ não tem necessariamente todos estes elementos menores do que zero.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- GILBERT ABRAHAM-FROIS & EDMOND BERREBI, (1979) *Theory of Value, Prices and Accumulation*, Cambridge University Press, Cambridge.
- B. SCHEFOLD, (1980) Fixed Capital, Accumulation and Technical Progress in *Essays on the Theory of Joint Production*, edited by Luigi Pasinetti, Columbia University Press, New York, 1980.
- PIERO SRAFFA, (1977) *Produção de Mercadorias por meio de Mercadorias*, Zahar, Rio de Janeiro.

